Διάλεξη 11η

12/11/2018

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Γρ. Διαφ. Εξ. n-τάξης:

(E_n): $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 \cdot y^0 = b$

(c) : $y(x_0) = c_0$, $y^{(1)}(x_0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}$

όπ $a_i, b \in C(I)$, $i = 0, \dots, n$

$a_n(x) \neq 0$, $x \in I$

$x_0 \in I$.

Θέτω: $\left.\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \\ y_3 &= y'' \\ &\vdots \\ y_n &= y^{(n-1)} \end{aligned}\right\}$ $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ και $(\bar{y})' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ y^{(n)} = \frac{b}{a_n} - \frac{a_{n-1}}{a_n} y_{n-1} \dots - \frac{a_0}{a_n} y_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & & & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b}{a_n} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \bar{y}'(x) &= A(x)\bar{y}(x) + \bar{b}(x) \\ \bar{y}(x_0) &= \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \bar{y}_0 \end{aligned}}$$

Θεώρημα (σελ 61): Ας είναι a_i $(i=0,\dots,n)$, $b \in C(I)$ με I διάστημα της πραγματικής ευθείας και $x_0 \in I$, τότε για $c_0,\dots,c_{n-1} \in \mathbb{R}$. Το π.Α.Τ. (E_n)-(C) έχει ακριβώς μια λύση η οποία ορίζεται σε όλο το I.

Απόδ

(Βιβλίο)

Παράδ. σελ 5)

$$(x^2+1)\underbrace{y''}_{y_3} - 5x\underbrace{y'}_{y_2} + x^2\underbrace{y}_{y_1} = e^x \quad // \; y(2)=0,\; y'(2)=1,\; y''(2)=-3$$

Άρα:
$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' = y_1' \\ y_3 &= y'' = y_1'' \end{aligned}\right\} \quad \bar{y}' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{x^2}{x^2+1} & \frac{5x}{x^2+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{e^x}{x^2+1} \end{bmatrix}, \quad \bar{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \bar{y}_0$$

Έτσι $\quad y_3 = y'' = \dfrac{5x}{x^2+1} y_2 - \dfrac{x^2}{x^2+1} y_1 + \dfrac{e^x}{x^2+1}$

Έτσι $I = \mathbb{R}$

Άσκηση 2,6(7,8)

$$\left.\begin{array}{l} y_1''' - e^x \cdot y_1' + y_1 = \sin x \\ y_2'' = e^x y_1 \end{array}\right| \begin{array}{l} y_1(1) = y_1'(1) = 0 \\ y_1''(1) = y_2(1) = y_2'(1) = 2 \end{array}$$

Θεωρώ ότι

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = u_1 \\ y_1' = u_2 \\ y_1'' = u_3 \\ y_2 = u_4 \\ y_2' = u_5 \\ y_2'' = u_6 \end{array}\right\}$$

και προκύπτει ένα σύστημα 6x6 και προκύπτει ένας "περιορισμός" πίνακας" κ.ο.κ.

~o~o~o~o~o~o

Πόρισμα: Το π.Α.Τ. : $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$

$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$

Έχει μόνο την μοναδική λύση.

Ας είναι $\alpha : C^{(n)}(I) \to C(I)$ με $\alpha(\varphi) =$

$= a_n \phi^{(n)} + \dots + a_1 \phi$, $\phi \in C^{(n)}(I)$

Τότε η μη ομογενής εξίσωση γράφεται ως : $L(y) = b$

Ενώ η ομογενής $L(y) = 0$.

Θεώρημα: Έστω ο τελεστής L να είναι γραμμικός

Απόδ.

Για $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ με $\phi_1, \phi_2 \in C^{(n)}(I)$ έχουμε ότι:

$$c_1\phi_1 + c_2\phi_2 \in C^{(n)}(I)$$

$$L(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) = a_n(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) = a_n(c_1\phi_1 + c_2\phi_2)^{(n)} + \dots + a_0(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) = a_n(c_1\phi_1^{(n)} + c_2\phi_2^{(n)}) + \dots + a_0(c_1\phi_1 + c_2\phi_2)$$

$$= \dots = c_1 L(\phi_1) + c_2 L(\phi_2)$$

Θεώρημα (υπέρθεσης): Αν y λύση της $L(y) = b_i$, $i = 1, \dots, k$ τότε η συνάρτηση $y = \sum_{i=1}^{k} c_i y_i$ είναι λύση της εξίσωσης $L(y) = \sum_{i=1}^{k} c_i b_i$

Απόδ.

Ας είναι y_i λύση της $L(y) = b_i$ $(i = 1, \dots, k)$ και $y = \sum_{i=1}^{k} c_i y_i$ τότε

$$L(y) = L\left(\sum_{i=1}^{k} c_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{k} c_i L(y_i) = \sum_{i=1}^{k} c_i b_i = b$$

//

(*) Είναι ένα "κόλπο" που χρησιμοποιείται όταν έχω γραμμικότητα //.

<u>Παρατήρηση</u>: Ας είναι $y_1, \dots, y_k$ λύσεις της εξίσωσης (E_0) και $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$. Τότε η $y = \sum_{i=1}^{k} c_i y_i$ είναι, επίσης λύση της (E_0)

<u>Παρατήρηση</u>: Ας είναι y_1, y_2 λύσεις του $L(y) = b$
Τότε η $y = y_1 - y_2$ είναι λύση της (E_0).
↳ Αυτό συμβαίνει γιατί ο τελεστής μας είναι γραμμικός και: $L(y) = L(y_1 - y_2) = L(y_1) - L(y_2)$
$= b - b = 0.$

(*) Αυτό ισχύει για την εξίσωση <u>μόνο</u> και <u>όχι</u> για το Π.Α.Τ.

(σελ 65)
<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Ας είναι $y_1, \dots, y_n$ λύσεις της (E_0)
Οι $y_1, \dots, y_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες <u>ανν</u>
$W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0, \forall x \in I$ (*Το θεώρημα βρίσκεται γραμμένο ολοκληρωμένο στο βιβλίο: σελ 65 (Θεώρημα 4))

<u>1º σκέλος απόδ: (⇒)</u> <u>Απόδ</u>
Υποθέτουμε ότι οι $y_1, \dots, y_n$ είναι λύσεις της (E_0) καθώς και ότι οι $y_1, \dots, y_n$ είναι γρ. ανεξάρτητες.
Έστω ότι $\exists\, x_0 \in I$: $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) = 0$
Θεωρούμε γραμμικό ομογενές σύστημα με αγνώστους $c_1, c_2, \dots, c_n$

$$\left.\begin{aligned} &c_1 y_1(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = 0 \\ &c_1 y_1'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) = 0 \\ &\vdots \\ &c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{aligned}\right\} : (S)$$

Παρατηρώ ότι η ορίζουσα του συστήματος (S) είναι η:

$$D = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \vdots & & & \\ y^{n-1}(x_0) & \dots & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = \omega(y_1,\dots,y_n)(x_0)$$

$$= 0.$$

Επομένως το (S) έχει μη μηδενική λύση. Τα $c_1,\dots,c_n$ με $|c_1|+\dots+|c_n| \neq 0$.

Η συνάρτηση $y = c_1y_1+\dots+c_ny_n$ είναι λύση της (E_n) με $y(x_0)=0$, $y'(x_0)=0$, ..., $y^{(n-1)}(x_0)=0$

άρα ...

$y(x)=0$, $\forall x\in I$, δηλαδή: $\exists\, c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R}$ με $|c_1|+\dots+|c_n|\neq 0$ και $c_1y_1(x)+\dots+c_ny_n(x)=0$, $\forall x\in I$

Άρα $y_1,\dots,y_n$ γραμμ. εξαρτημένα.

ΑΤΟΠΟ

__2ο σκέλος αποδ.: ($\Leftarrow$)__

Υποθέτω ότι $\omega(y_1,\dots,y_n)(x)\neq 0$, $\forall x\in I$.

Θα αποδ. ότι οι $y_1,\dots,y_n$ είναι γρ. ανεξ.

Ας είναι $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R}$ με

$$(S_0): \begin{cases} c_1y_1(x)+\dots+c_ny_n(x)=0, & x\in I \\ c_1y_1'(x)+\dots+c_ny_n'(x)=0 \\ \vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x)+\dots+c_ny_n^{(n-1)}(x)=0 \end{cases}$$

Το σύστημα (S_0) έχει ορίζουσα: $W(y_1,\ldots,y_n)(x) \neq 0$

άρα ....

$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ δηλ. γραμ. ανεξάρτητα

και έπεται το ζητούμενο.

<u>Θεώρημα</u> **(Liouville)**: Αν $y_1,\ldots,y_n$ είναι λύσεις της (E_0)

τότε $W(y_1,\ldots,y_n)(x) = W(y_1,\ldots,y_n)(x) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(s)}{a_n(s)} ds}$

$, \forall\, x_0, x \in I.$